2005年度数学　解答・解説

＜解答＞
1 - d 2 - c 3 - b 4 - a 5 - a 6 - b 7 - b 8 - c 9 - d 10 - d 11 - d 12 - c 13 - a
＜ Outline ＞
数学 I,A,II,B の幅広い分野から出題されており、やや難しい問題も幾つか含まれていた。また数学 III で扱う無限の概念が含まれているものもあり、勿論知らなくても解けるが、やはり数学 III を既習した者が有利であることは否めない。解ける問題から確実に解答していくのが良い。

1　２進法と桁数

＜大問のまとめ＞
1.1 は 10 進法で表された数字を２進法で表すための方法を知らないと少し戸惑ったかもしれない。この方法を知らなかった場合は今後も出る可能性はあるためここで覚えてほしい。残りの問題は文章を良く読み、手を動かしさえすれば解けるはずなので、全て正解したい。

1.1　(1)-d 計算問題

問題にあるやり方をわかりやすく計算してみる。以下のように、2 で割りその商を下に書き、割り切れないときは余りである 1 を書き、割り切れるときは 0 を書く。これを繰り返す。

$$\begin{array}{rl}
2\,\underline{)\,85} & \cdots 1 = b_0 \\
2\,\underline{)\,42} & \cdots 0 = b_1 \\
2\,\underline{)\,21} & \cdots 1 = b_2 \\
2\,\underline{)\,10} & \cdots 0 = b_3 \\
2\,\underline{)\;\;5} & \cdots 1 = b_4 \\
2\,\underline{)\;\;2} & \cdots 0 = b_5 \\
2\,\underline{)\;\;1} & \cdots 1 = b_6 \\
0 &
\end{array}$$

よって

$$85 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

となり、２進法表示は 1010101 となるので答えは d。
（コメント）
大問のまとめにも書いたが、この２進法で表すための方法を知っていた方が有利である。ただ、問題文をしっかりと落ち着いて読み、指示通りに計算すれば出来る。復習をして今回の方法を確実にマスターしたい。

©BUCHO.NET

1.2　(2)-c 計算問題（等比数列の和）

11 桁の 2 進表現で表される最大の数は、11111111111 である。これを 10 進表現に直す。

$$\begin{aligned}
& 2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0 \\
= & \ \{\text{初項1、公比2、項数11の等比数列の和}\} \\
= & \ \frac{1\left(2^{11}-1\right)}{2-1} \\
= & \ 2^{11}-1 \\
= & \ 2^{10}\cdot 2-1 \\
= & \ 1024\cdot 2-1 \\
= & \ 2047
\end{aligned}$$

よって、答えは c。
（コメント）
この 2 進表現から 10 進表現にする方法を知っている人の方が、有利であったであろう。$2^{10}=1024$ はパソコンでもよく使うので覚えておくと良いだろう。

1.3　(3)-b 計算問題（指数計算）

問題文に与えられたように計算して

$$\begin{aligned}
x^{85} &= x^{84}\cdot x \\
x^{84} &= x^{42}\cdot x^{42} \\
x^{42} &= x^{21}\cdot x^{21} \\
x^{21} &= x^{20}\cdot x \\
x^{20} &= x^{10}\cdot x^{10} \\
x^{10} &= x^{5}\cdot x^{5} \\
x^{5} &= x^{4}\cdot x \\
x^{4} &= x^{2}\cdot x^{2} \\
x^{2} &= x\cdot x
\end{aligned}$$

と 9 回計算すればよいので、答えは b。
（コメント）
ミスをしないで、確実に正解したい。

1.4　(4)-a 計算問題（不等式）

11 桁の 2 進表現で表される最大の自然数は、1.2 より 2047 である。一方、10 桁の 2 進表現で表される最大の自然数は、1.2 を利用して $2^{10}-1=1023$ なので以下の不等式が成り立つ。

$$1024 \leq \quad n \quad \leq 2047$$

$$\Leftrightarrow f(1024) \leq \quad f(n) \quad \leq f(2047) \cdots ①$$

$$\begin{aligned} f(1024) &= f(512)+1 \\ &= f(256)+2 \\ &= f(128)+3 \\ &= f(64)+4 \\ &= f(32)+5 \\ &= f(16)+6 \\ &= f(8)+7 \\ &= f(4)+8 \\ &= f(2)+9 \\ &= f(1)+10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2047) &= f(1023)+2 \\ &= f(511)+4 \\ &= f(255)+6 \\ &= f(127)+8 \\ &= f(63)+10 \\ &= f(31)+12 \\ &= f(15)+14 \\ &= f(7)+16 \\ &= f(3)+18 \\ &= f(1)+20 \\ &= 20 \end{aligned}$$

であり、$f(n)$ は n について増加関数なので

$$① \Leftrightarrow 10 \leq f(n) \leq 20$$

となる。よって、答えは a。
（コメント）
最初の不等式が思いつくかが分かれ目となった。普段から現象を不等式で表すことになれておきたい。

2　グラフの移動、領域の面積

＜大問のまとめ＞
2.1 は簡単な問題なので落としたくないが、前半はやや難しかった。恐らく高校の段階では写像について細かい議論をしないので、2.2 は特に難しかったと思う。ただ、後半の問題は単なる計算問題なので、残りの問題は出来れば完答したい。

2.1　(5)-a 計算問題（平行移動と対称移動）

問題文より $f(x) = rx + s = y$ が与えられている。この $y = f(x)$ のグラフを x 軸 の向きに a だけ平行移動したものは

$$y = r(x-a) + s \cdots ①$$

である。これを直線 $y=x$ について線対称な奇跡をグラフの関数を求めるためには、① における x と y を入れ替えて、$y=g(x)$（$g(x)$ は x の関数）の形すればよい。よって

$$\begin{aligned} x &= r(y-a)+s \\ \frac{x-s}{r} &= y-a\ (\because r \neq 0\ \text{より}) \\ y &= \frac{1}{r}x - \frac{s}{r} + a \end{aligned}$$

となるので、答えは a。
（コメント）
グラフを平行移動や対称移動した際の関数を求める初歩的な問題であった。必ず正解したい。もし、対称移動の方法を忘れてしまっていたら、しっかり復習しよう。

2.2　(6)-b 計算問題（逆関数）

$y=f(x)$ のグラフを x 軸 に関して対称移動したグラフの関数は

$$y=-f(x)$$

であり、これを直線 $y=x$ に関して対称移動した関数は

$$\begin{aligned} x &= -f(y) \\ f(y) &= -x \end{aligned}$$

両辺に f の逆関数 $f^{-1}(=g)$ をかけて

$$\begin{aligned} f(y) &= -x \\ f^{-1}\circ f(y) &= f^{-1}(-x) \\ y &= f^{-1}(-x) \\ \therefore y &= g(x) \end{aligned}$$

となるので、答えは b。
（コメント）
正直高校生には難しい議論だと思うので、全てを理解する必要はない。ちなみに、上の式変形における $f^{-1}\circ f(y)$ は合成関数を意味しており、y を写像 f で移して、それを f の逆写像 f^{-1} で引き戻すので、最終的に y は y に移る。

2.3　(7)-b 計算問題（対称な点）

任意の 点 (a,b) に関して、それが $y=f(x)$ 上にある場合

$$b=f(a)\cdots②$$

©BUCHO.NET

が成り立つ。
また、点 (a,b) と [illegible] x [illegible]関[illegible]て対称な点は $(-b,-a)$ [illegible]ある。[illegible]こで、この点は $y=h(x)$ 上の点であるので

$$-a = \text{[illegible]}$$

が成り立つ。これに先ほど求めた ② を代入して

$$\begin{aligned} -a &= h(-f(a)) \\ h(-f(a)) &= -a \end{aligned}$$

となり、a,b は任意故

$$h(-f(x)) = -x$$

となるので、答えは b。
（コメント）
条件を利用して立式すれば、あとは連立方程式を解いて文字を消せば良い。若干難しいかもしれないが、是非とも解けるようになりたい問題である。

2.4 ([illegible]-c 計算問題

与式を変形して

$$\begin{aligned} & A(1,a) + A\left(\frac{1}{a},1\right) + A\left(\frac{1}{a},a\right) \\ = \; & A(1,a) + A(1,a) + \underline{A(1,a^2)} \\ = \; & 2A(1,a) + \underline{A(1,a) + A(a,a^2)} \; (\because a > 1 \text{ より } a < a^2) \\ & 2A(1,a) + \underline{A(1,a) + A(1,a)} \\ = \; & 4A(1,a) \end{aligned}$$

となるので、答えは c。
（コメント）
[illegible]部分の、$a>1$ より $a<a^2$ となり、分解出来ることに気付ければ出来る。これは、積分などにおいて計算しやすくするために積分区間を分けることに似ている（本質的に同じである）。

2.5 ([illegible] 計算問題

与式を変形して

$$\begin{aligned} A(a, \text{[illegible]} + 2b^2) &= A(\text{[illegible]} \\ \Leftrightarrow A(\text{[illegible]}, ab + 2b^2) &= A(a, a^{\text{[illegible]}}) \end{aligned}$$

SAMPLE

となり、これが成立する[illegible]

$$
\begin{aligned}
ab + 2\text{[illegible]} &\text{[illegible]} \\
a^{2}\text{[illegible]} - 2b^{2} &\text{[illegible]}\ 0 \\
(a - 2\text{[illegible]})(a\text{[illegible]} &= 0 \\
\therefore a = 2\text{[illegible]}\ \underline{a = -b}
\end{aligned}
$$

こ[illegible]て条件[illegible]り $a > 0,\ b > 0$ なので[illegible]線部[illegible]不適である。
以上より[illegible]答えは d。
（コメント）
与[illegible]られた条件を[illegible]していけ[illegible]因数分解をすればすぐに[illegible]来る。[illegible]単な問題なので[illegible]是非と[illegible]正解したい。

3　折[illegible]線[illegible]長さ

＜大問のま[illegible]
等[illegible]数列の和で、項数が無限大の[illegible]の計[illegible]法が問題文で提示され[illegible]それ[illegible]上手く使い[illegible]なす[illegible]と[illegible]出来ないと高[illegible]点は難しい。[illegible]れは本来数学 III で扱うが[illegible]これを機に少し勉強[illegible]てみる[illegible]良いと思う。[illegible]た、数列におけ[illegible]隣接二項間の関[illegible]で表す[illegible]とにもなれておき[illegible]たい。

3.1　(10)[illegible]図形[illegible]解（[illegible]似比と面積比）

P_n から[illegible]軸に[illegible]ろした垂線と x 軸との[illegible]点を $\text{[illegible]}_n(a_n,$ [illegible]とすると

$$
\begin{aligned}
a\text{[illegible]} &= \text{[illegible]}H_2 \\
\text{[illegible]} &= OP_1 - H_2P\text{[illegible]} \\
a_2 &= 1 - ca_2 \\
\therefore a_2 &= \frac{1}{1+\text{[illegible]}}
\end{aligned}
$$

また、同様に

$$
\begin{aligned}
\text{[illegible]} &= OI\text{[illegible]} \\
\text{[illegible]} &= \text{[illegible]}P_3 - \text{[illegible]}_4P_3 \\
a_4 &\text{[illegible]} (O\text{[illegible]} - P_3P_1) - ca_4 \\
a_4 &\text{[illegible]} (1 - 2H_2P_1) - \text{[illegible]} \\
a\text{[illegible]} &= (1 - 2ca_2) - ca_4
\end{aligned}
$$

SAMPLE

$$\therefore a_4 = \frac{1}{[illegible]}\left(1 [illegible] \frac{[illegible]}{1+c}\right)$$

$$a_4 = \frac{[illegible]}{(1+c[illegible]}(1 [illegible] c - 2c)$$

$$a_4 = \frac{[illegible] c}{[illegible]1+[illegible]}$$

[illegible]なる。

こ[illegible]

$$P[illegible] : P_3P_5 = 2H_2 [illegible] : [illegible] P_3$$

$$= 2ca_2 : [illegible]$$

$$= a_2 : a_4$$

となるので[illegible]

$$\triangle P_1 [illegible] P [illegible] \triangle P_3P_4P_5 = a_2^2 : a_4^2$$

$$= \frac{1}{(1[illegible]c)^2} : \frac{(1 - [illegible]}{(1+[illegible]}$$

$$= (1 [illegible] : (1 [illegible] c)^2$$

[illegible]なる。[illegible]って、答えは[illegible]

（コメント）

若干この問題は難[illegible]かった。2[illegible]の三角形の面積比[illegible]相似比の[illegible]だと気づいたとしても、[illegible]の後それらを c で表[illegible]なければ解答を出すことは出[illegible]な[illegible]

3.2 (11[illegible]d[illegible]計算問題（数列）

3.1[illegible] $\triangle P$[illegible]P_3 と $\triangle P_3P_4P_5$ の面積比は ([illegible] : $(1-c)^2$ で[illegible]た。故に[illegible]$\triangle P_1P_2P_3$ と [illegible]P_4[illegible] の相似比は $P_1P_2 : P_3P_4 = $ [illegible]$+ c) : (1 - c)$ である。よって[illegible]

$$P_3P_4 = \frac{1-c}{1+c} \cdot P_1P_2 [illegible]$$

[illegible]、同様にして

$$P_{2k+1}P_{2k+[illegible]} \frac{1-[illegible]}{[illegible]} P_{2[illegible]}P_{2k} \quad (k = 1, 2, 3 \cdots)$$

また、

$$P_1P_2 [illegible](1 - a_2) = \frac{\sqrt{2}c}{1+c}$$

SAMPLE

となるので、求める折れ[illegible]長さ[illegible]は

$$\begin{aligned} L &= 2(P_1 P\text{[illegible]} + \cdots + P_{2n-1}P_{2n} + \text{[illegible]} \\ &= \text{[illegible]}\frac{\sqrt{2}c}{\text{[illegible]}} \cdot \frac{1}{1\text{[illegible]}\frac{1-c}{1+c}} \quad \text{(問題文にあ[illegible]無[illegible]等比数列の和の公式を[illegible]た)} \\ &= \text{[illegible]}\frac{\sqrt{2}c}{\text{[illegible]}+c} \cdot \frac{1+c}{1+c-1\text{[illegible]}} \\ &= \text{[illegible]} \cdot \frac{\sqrt{2}c}{1+c} \cdot \frac{1+c}{2\text{[illegible]}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

と[illegible]るので、答え[illegible]。

（コメント）

最初に折れ[illegible]の長さ[illegible]等比[illegible]列の和で表されていること[illegible]に[illegible]がつけば、あとは[illegible]ある。[illegible]比をしっ[illegible]りと求めて、無[illegible]等比級数（等[illegible]列の和の[illegible]と）の公式に代入[illegible]るだ[illegible]でよい。数学Bの[illegible]は、項数が有限の場合しか扱[illegible]す、[illegible]学IIIで無限の場合[illegible]扱う[illegible]、数学IIIまで学習した[illegible]の方[illegible]有利であった[illegible]もしれな[illegible]。公式自体は本文で与え[illegible]てい[illegible]め数学III[illegible]の既習は必要[illegible]しないが、やは[illegible]初めて見て[illegible]うよりは何度か[illegible]たことが[illegible]るほうが計算など[illegible]しやす[illegible]と思う。もし[illegible]間が[illegible]ようならば、数学IIIにも挑戦[illegible]いたい（もちろ[illegible]細かい[illegible]は必要ではな[illegible]）。

[illegible]3　(12)-c [illegible]算問題（[illegible]理）

条件より

$$Q_0(\text{[illegible]}),\ Q\text{[illegible]}r\cos\alpha,\text{[illegible]}\sin\alpha),\ Q_2(r^2\text{[illegible]}2\alpha,\text{[illegible]}\sin 2\alpha)\text{[illegible]}_3(r^3\cos 3\alpha, r^3\sin\text{[illegible]}\alpha)$$

とな[illegible]そこ[illegible]とりあえず以下のように計[illegible]て[illegible]る。

$$\begin{aligned} (Q\text{[illegible]}Q_1\text{[illegible]})^2 &= (r\cos\alpha-1)^2+(\text{[illegible]}n\alpha)^2 \\ &= r^2\cos^2\text{[illegible]}2r\text{[illegible]}s\alpha+\text{[illegible]}\sin^2\alpha \\ &= r^2(\cos^2\text{[illegible]}si\text{[illegible]}\alpha)-2r\cos\alpha+1 \\ &= r\text{[illegible]}r\cos\text{[illegible]}1 \\ (Q_1Q_2)^2 &\text{[illegible]} (r^2\text{[illegible]}s\,2\text{[illegible]}-r\cos\alpha)^2+(r^2\sin 2\alpha\text{[illegible]}r\sin\alpha)^2 \\ &= \text{[illegible]}2\alpha-2r^3\cos 2\alpha\cos\text{[illegible]}\cos\text{[illegible]}+r^4\text{[illegible]}n^2 2\alpha-2r^3\sin\text{[illegible]}\alpha\sin\alpha+r^2\sin\text{[illegible]}\alpha \\ &= r\text{[illegible]}s^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha)-\text{[illegible]}^3(\cos\text{[illegible]}\cos 2\alpha\text{[illegible]}\sin\alpha\sin 2\alpha)+\text{[illegible]}(\cos^2\text{[illegible]}+\sin^2\text{[illegible]} \\ &\text{[illegible]}^2\left(r^2-2r(\cos 2\alpha\text{[illegible]}\alpha+\text{[illegible]}\alpha\sin\alpha)+1\right) \\ &= r^2\left(r^2-2r\cos(2\alpha-\text{[illegible]}1\right) \text{（[illegible]加法定理より）} \\ &= r^2(r^2-2r\cos\text{[illegible]}) \\ (Q_2\text{[illegible]}_3)^2 &= (r^3\text{co[illegible]}-r^2\cos\text{[illegible]})^2+(r^3\sin 3\alpha-r^2\text{[illegible]}n\,2\alpha)^2 \end{aligned}$$

SAMPLE

$$
\begin{aligned}
&= r^6\cos^2 3\alpha-2r^5\cos 3\alpha\cos 2\alpha+r^4\cos^2 2\alpha+r^6\sin^2 3\alpha-2r^5\sin 3\alpha\sin 2\alpha+r^4\sin^2 2\alpha\\
&= r^6(\cos^2 3\alpha+\sin^2 3\alpha)-2r^5(\cos 3\alpha\cos 2\alpha+\sin 3\alpha\sin 2\alpha)+r^4(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha)\\
&= r^4\left(r^2-2r(\cos 3\alpha\cos 2\alpha+\sin 3\alpha\sin 2\alpha)+1\right)\\
&= r^4\left(r^2-2r\cos(3\alpha-2\alpha)+1\right)\\
&= r^4\left(r^2-2r\cos\alpha+1\right)
\end{aligned}
$$

[illegible]して選択肢と[illegible]比べて

$$
\begin{aligned}
&(Q_2Q_3)^2 = r^2(Q_1Q_2)^2\\
\Leftrightarrow\quad & Q_2Q_3 = r\,Q_1Q_2
\end{aligned}
$$

となるので、答えはc。

（コメント）

とりあえず上の３つを計算してみてから、答えを探してみよう。途中で加法定理を使って、簡単に表さなくてはならなかったので、若干難しかったかもしれない。普段から加法定理の計算になれておきたい。

3.4 (13) a 計算問題（数列）

3.3 より

$$Q_2Q_3 = r\,Q_1Q_2$$

なので、以下のように推測できる。

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1}Q_{n+2} &= r\,Q_nQ_{n+1}\\
Q_{n+1}Q_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,Q_nQ_{n+1}
\end{aligned}
$$

このとき、

$$Q_0(1,0),\ Q_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 45^\circ, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 45^\circ\right) \Leftrightarrow Q_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

より

$$
\begin{aligned}
Q_0Q_1 &= \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

SAMPLE

となるので、求める折れ[illegible]長さ[illegible]は

$$
\begin{aligned}
L &= Q_0Q_1 \text{[illegible]} + \cdots \text{[illegible]} + Q_nQ_{n+1} + \text{[illegible]} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \text{[illegible]}} \\
&= \frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{\text{[illegible]}} - 1} \\
&= \frac{1 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}\text{[illegible]})} \\
&= \sqrt{2}+1
\end{aligned}
$$

[illegible]るので、答え[illegible]a。

（コメント）

3.2 と同様[illegible]問題文で与え[illegible]れている無限等比級数の[illegible]式を利用した。初め[illegible]この公[illegible]を見[illegible]のであれ[illegible]少し難しいか[illegible]しれないが、出[illegible]正解した[illegible]問題である。